

MHDコードを用いたシミュレーションのモジュール化に関する基礎的研究

宇宙地球電磁気学研究分野 鈴木 智美

Introduction

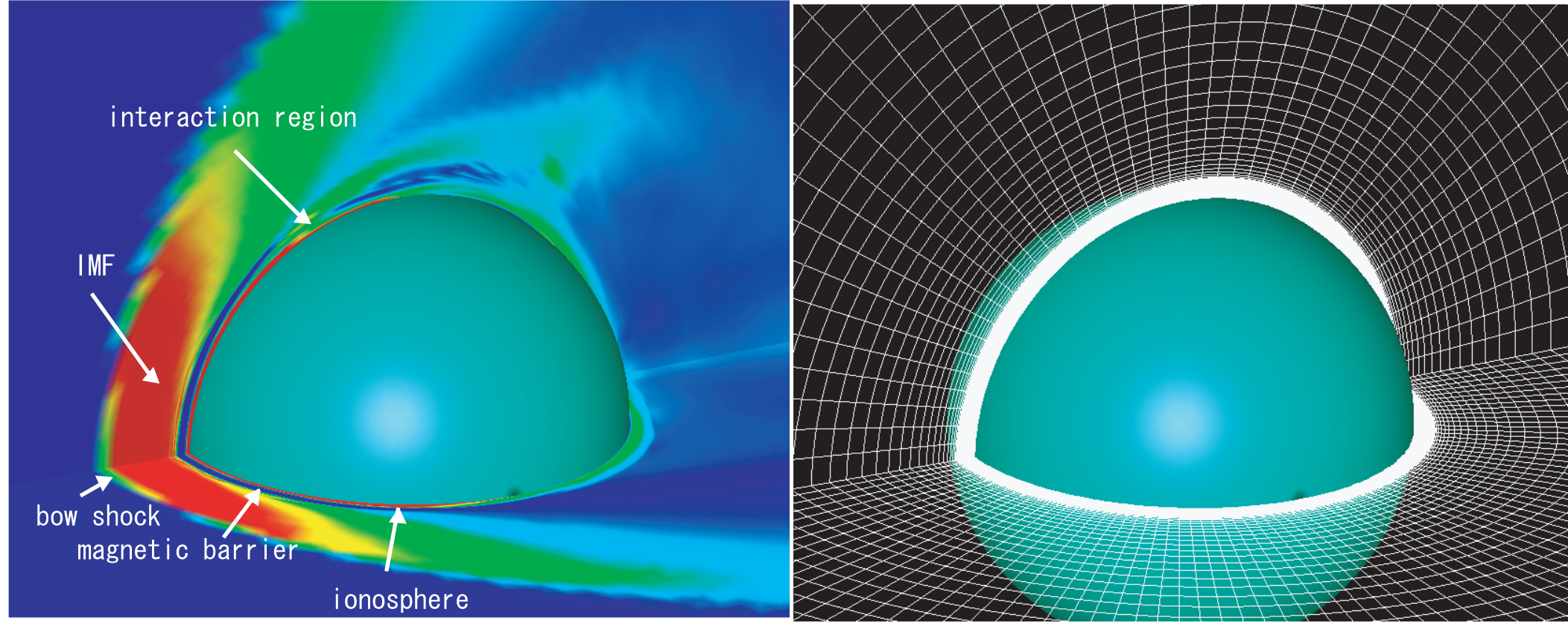
太陽-惑星間空間-磁気圏-電離圏結合系(Solar Terrestrial Environment ([STE]))は、空間スケール、時間スケール、物理量等の性質が大きく異なる領域が結合した系であるから、そのトポロジーは複雑である。このようなシステムでの物理現象を再現するシミュレーションコードを作成する上で重要なことは、空間を離散化する際、その複雑なトポロジーを網羅する非構造格子を生成することである。次にその格子上で方程式系を離散化する方法"スキーム"を適切に選ばなくてはならない。

一般にMHDコードを用いたプログラムは大きくなるので、プログラムの見直しをよくするためモジュール化を進めることも重要である。

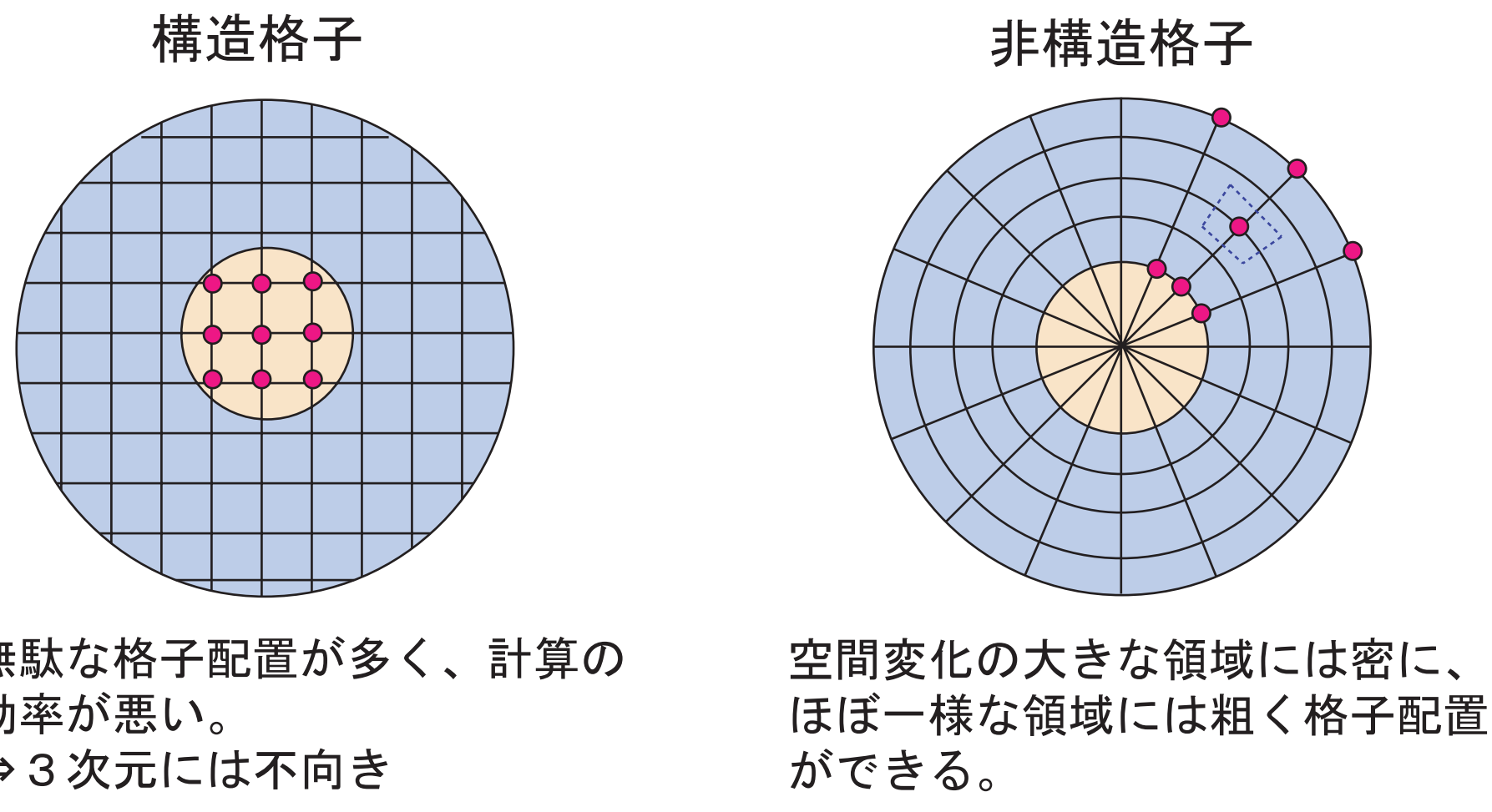
本特別研究では、MHDシミュレーションの学習システムを利用して、計算物理学の基礎知識の習得、電磁流体衝撃波の概観、プログラムのモジュール化の理解を目指した。

この学習システムの概要は高速プラズマ流中に置かれた導体球の周りに生ずるポテンシャルフロー、衝撃波を有限体積TVDスキームを用いてシミュレートするものである。また、このプログラムは磁気圏-電離圏、太陽-太陽風、太陽風-惑星、ダイナモ、マントル対流のシミュレートにも応用可能である。

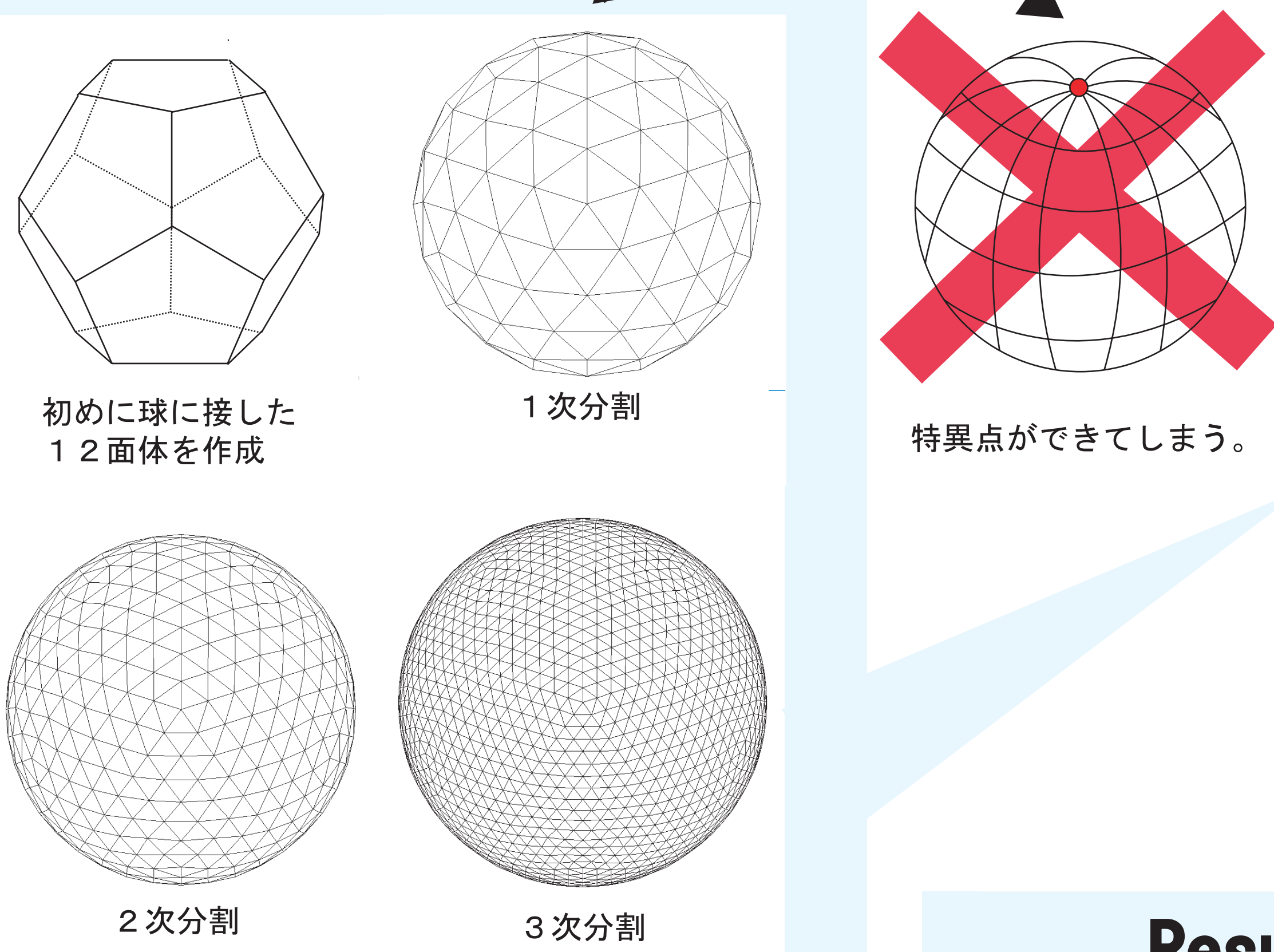
Solar wind-planet interaction pressure distribution



Grid systems



座標生成



The conservation-law form of the ideal MHD equations

MHD方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho V) \quad \text{連続の式}$$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho V V + pI) + j \times B \quad \text{運動方程式}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla \cdot ((e+p)V) + j \cdot E \quad \text{エネルギー方程式}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E \quad \text{電磁誘導の式}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \text{ガウスの法則}$$

$$E = -V \times B + \eta j \quad \text{オームの法則}$$

$$\mu_0 j = \nabla \times B \quad \text{アンペールの法則}$$

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho V^2 \quad \text{全エネルギー}$$

ρ : 密度、 V : 速度、 I : 単位行列、 j : 電流密度、
 e : エネルギー、 E : 電場、 B : 磁束密度、
 η : 抵抗率、 μ_0 : 真空の透磁率、 γ : 比熱比、
 $m = \rho V$: 運動量

保存形

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (\text{保存形}) \quad F, G, H \equiv \text{流束 (フラックス)}$$

保存形...ある体積の中に含まれる物理量が、その体積片に流れ込む流束によって増減する。

$$u = (\rho, m_x, m_y, m_z, B_x, B_y, B_z, U)^T$$

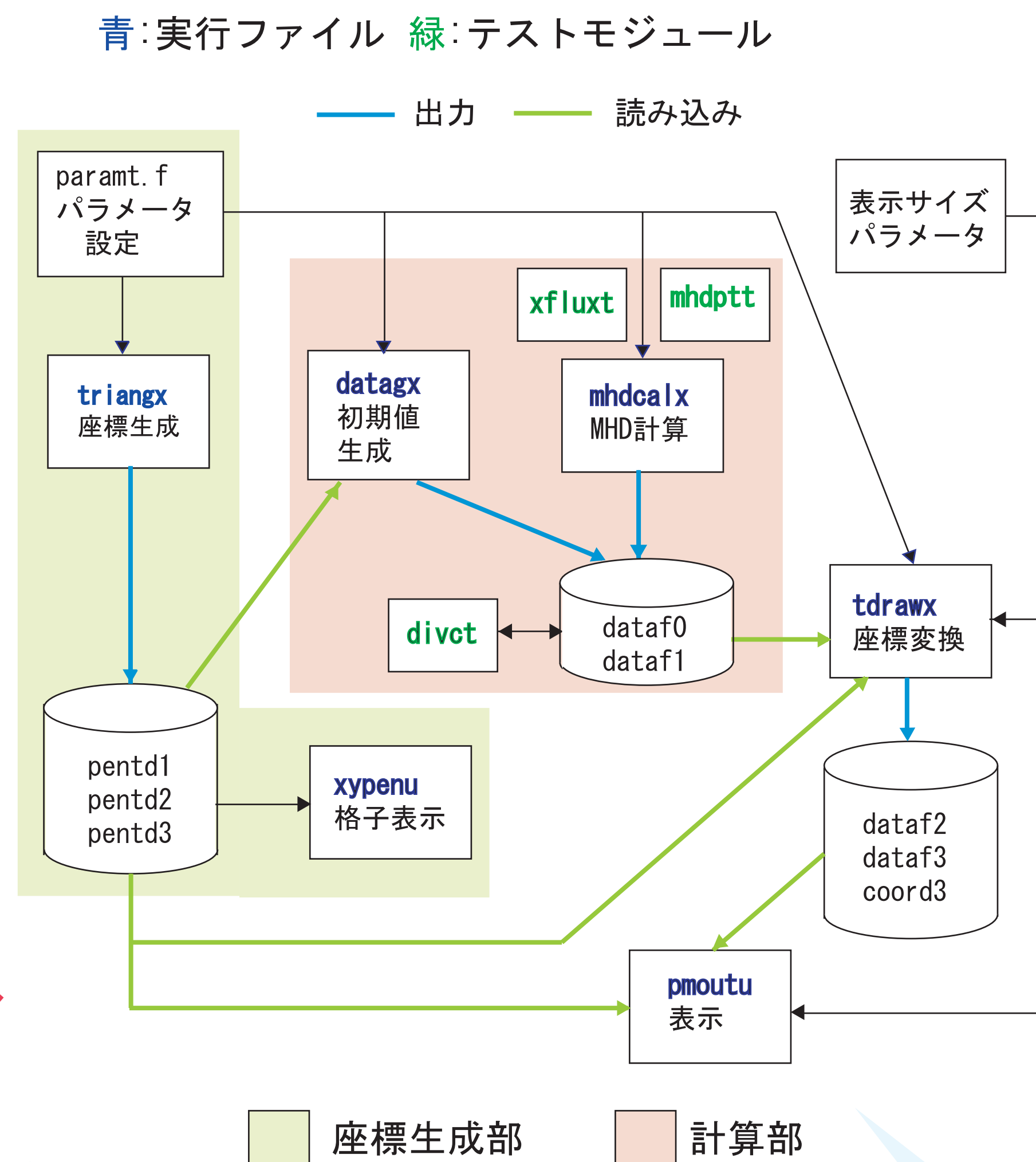
$$F = \begin{pmatrix} m_x \\ \rho + \frac{m_x^2}{\rho} + \frac{B_x^2}{2\beta} \\ \frac{m_x m_y}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_y \\ \frac{m_x m_z}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_z \\ \frac{m_x m}{\rho} - \frac{m_x^2}{\rho} \\ \frac{m_x}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) \\ \frac{m_x}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) - \frac{B_x}{\beta} (\frac{m_x m_y}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_y) \\ \frac{m_x}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) - \frac{B_x}{\beta} (\frac{m_x m_z}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_z) \\ \frac{m_x}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) - \frac{B_x}{\beta} (\frac{m_x m}{\rho} - \frac{m_x^2}{\rho}) \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} m_y \\ \frac{m_x m_y}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_y \\ \rho + \frac{m_x^2}{\rho} + \frac{B_x^2}{2\beta} \\ \frac{m_x m_y}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_y \\ \frac{m_x m_z}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_z \\ \frac{m_y m}{\rho} - \frac{m_y^2}{\rho} \\ \frac{m_y}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) \\ \frac{m_y}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) - \frac{B_y}{\beta} (\frac{m_x m_y}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_y) \\ \frac{m_y}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) - \frac{B_y}{\beta} (\frac{m_x m_z}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_z) \\ \frac{m_y}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) - \frac{B_y}{\beta} (\frac{m_x m}{\rho} - \frac{m_x^2}{\rho}) \end{pmatrix}$$

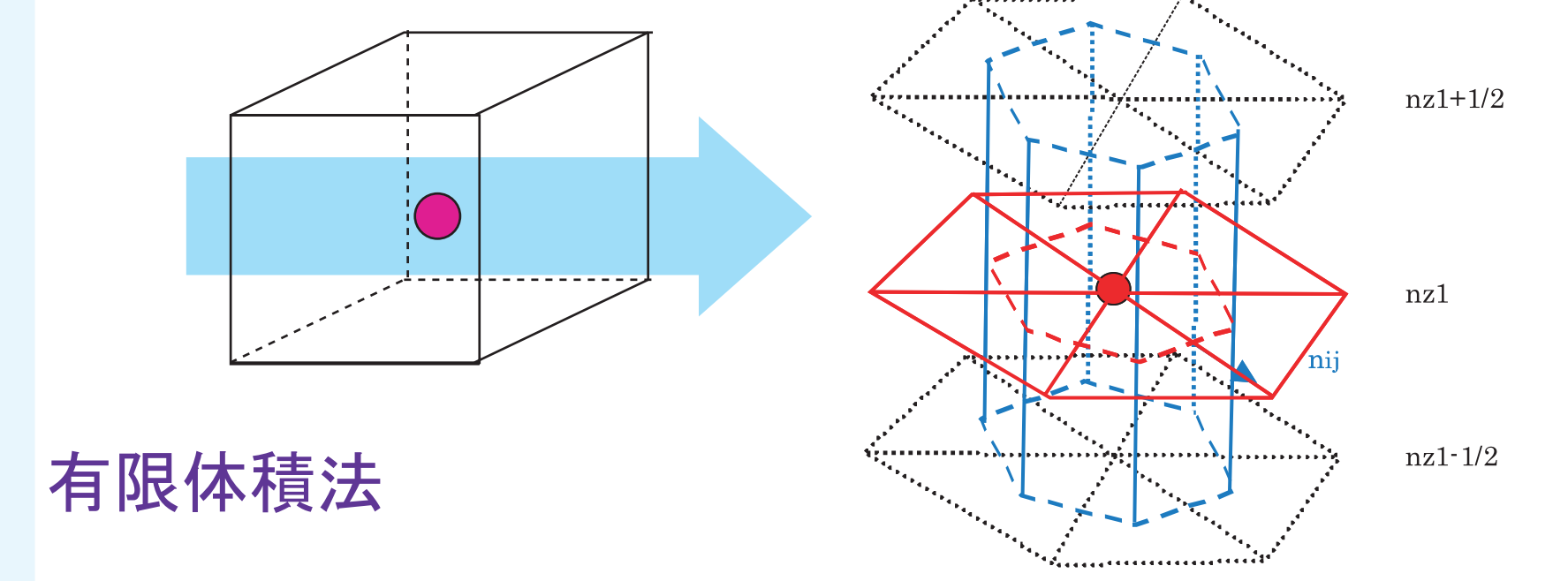
$$H = \begin{pmatrix} m_z \\ \frac{m_x m_z}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_z \\ \frac{m_x m_z}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_z \\ \rho + \frac{m_x^2}{\rho} + \frac{B_x^2}{2\beta} \\ \frac{m_x m_z}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_z \\ \frac{m_z m}{\rho} - \frac{m_z^2}{\rho} \\ \frac{m_z}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) \\ \frac{m_z}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) - \frac{B_z}{\beta} (\frac{m_x m_y}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_y) \\ \frac{m_z}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) - \frac{B_z}{\beta} (\frac{m_x m_z}{\rho} - \frac{1}{\beta} B_x B_z) \\ \frac{m_z}{\rho} (U + \frac{B_x^2}{2\beta} + P) - \frac{B_z}{\beta} (\frac{m_x m}{\rho} - \frac{m_x^2}{\rho}) \end{pmatrix}$$

- 時間ステップ数が大きくなっても保存則が厳密に成り立つので、数値誤差が蓄積しない。
- 非構造格子を採用しているため、差分法を用いてしまうと空間差分 ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) の定義が困難になる。

プログラム全体図



Numerical method



有限体積法

$$V = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

ガウス積分

$$\int V_x dv = \int (\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial G_x}{\partial y} + \frac{\partial H_x}{\partial z}) dv$$

$$\int V_y dv = \int (\frac{\partial F_y}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z}) dv$$

$$\int V_z dv = \int (\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial G_z}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}) dv$$

有限体積

$$V_x V_i = \sum_j (F_{ij} n_{ij} + G_{ij} n_{ij} + H_{ij} n_{ij}) s_{ij}$$

$$V_y V_i = \sum_j (F_{ij} n_{ij} + G_{ij} n_{ij} + H_{ij} n_{ij}) s_{ij}$$

$$V_z V_i = \sum_j (F_{ij} n_{ij} + G_{ij} n_{ij} + H_{ij} n_{ij}) s_{ij}$$

TVDスキーム

単調性を保つ ($u(X, 0)$ が X の単調増加関数なら、 $u(X, t)$ も X の単調増加関数とする) ので数値振動を避けることができる。

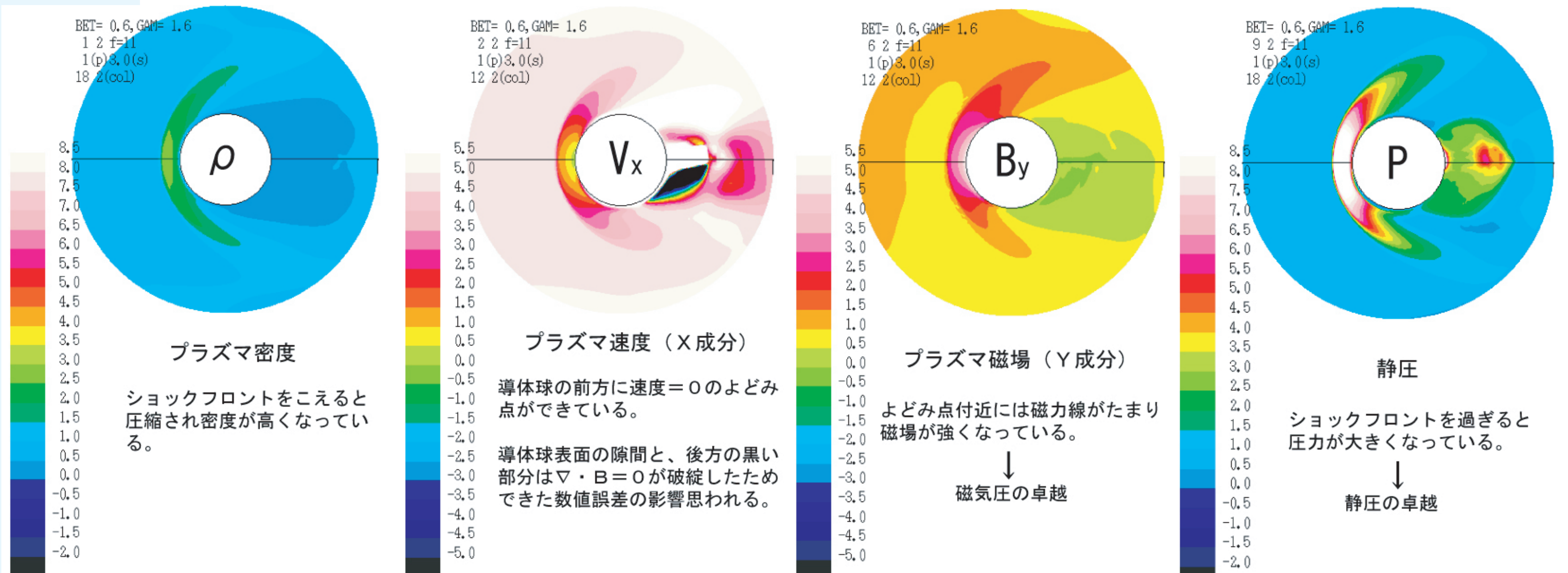
$$F_{ij} = (F_i + F_j) - R \Delta R^{-1} (u_j - u_i) / 2$$

Results of calculation

境界条件 ($X > 0$ の上流部分)

$V_x = 5.0$ $B_x = 0.0$
 $V_y = 0.0$ $B_y = 1.0$
 $V_z = 0.0$ $B_z = 0.0$

超音速 (マッハ数 $M > 1$) のプラズマ流中に置かれた球を考える。圧縮性流体である高速プラズマ流が導体球にぶつかって生じる密度変化や速度変化は上流側に音波として伝播しようとする。しかし、上流からは超音速のプラズマ流が下流に向けて流れているので、音波は上流に伝わることができず衝撃波が形成される



※すべての物理量は太陽風パラメータの典型的な値で規格化してある。

Suggestions for the future studies

本特別研究では、計算物理学の基礎知識の習得にとどまった。しかし、今回用いたプログラムは物理現象を3次元空間で離散化して解こうとするなら、多くの地球科学分野の諸物理現象に応用可能である。すぐにでも応用可能なものとしては

- 太陽風と非磁化惑星電離圏相互作用のシミュレート
- 太陽-太陽圏での衝撃波のシミュレート

これらの数値実験に応用したい。